BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Л.И.АМИРОВА

Бакинский Государственный Университет

kamhasov @ rambler.ru

В работе получена теорема о разрешимости одного класса краевых задач для операторно-дифференциального уравнения четвертого порядка, главная часть которого содержит нормальный оператор. Получены оценки норм операторов промежуточных производных через главную часть уравнения, которые имеют самостоятельный математический интерес. Условия разрешимости поставленной задачи выражены свойствами коэффициентов операторно-дифференциального уравнения, а именно, эти условия определены через относительные нормы операторов возмущенной части уравнения.

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство. В этом пространстве рассмотрим нормальный оператор A с компактным обратным, спектр которого содержится в угловом секторе

$$S_\varepsilon = \{\lambda : |\arg \lambda| \le \varepsilon\},\ 0 \le \varepsilon < \pi/2 .$$

Очевидно, что A можно представить в виде $A = UC$, где C - положительно определенный самосопряженный оператор, а U - унитарный оператор в H, причем $UCx = CUx$ при $x \in D(A) = D(C)$. Обозначим через H_γ - гильбертову шкалу пространств, порожденную оператором C, т.е. $H_\gamma = D(C^\gamma)$,

$$(x, y)_\gamma = (C^\gamma x, C^\gamma y),\ \gamma \ge 0.\ (H_0 = H).$$

Далее, определим гильбертово пространство

$$L_2(R_+;H) = \left\{ f \,\middle|\, f(t) \in H, \quad \|f\|_{L_2(R_+;H)} = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

и следующие гильбертовы пространства [1]:

$$W_2^2(R_+;H) = \left\{ u \,\middle|\, u^{(4)} \in L_2(R_+;H), C^4 u \in L_2(R_+;H) \right\},$$

$$\overset{0}{W}{}_2^2(R_+;H) = \left\{ u \,\middle|\, u \in W_2^4(R_+;H), u(0) = u''(0) = 0 \right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^4(R_+;H)} = \left(\left\| u^{(4)} \right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\| C^4 u \right\|^2_{L_2(R_+;H)} \right)^{1/2}.$$

В данной работе мы рассмотрим следующую начально-краевую задачу

$$P\left(d/dt\right) u = \left(-\frac{d^2}{dt^2} + A^2 \right)^2 u + \sum_{j=0}^{4} A_{4-j} u^{(j)}(t) = f(t),\ t \in R_+ = (0, \infty), \quad (1)$$

$$u(0) = u''(0) = 0, \quad (2)$$

где $f \in L_2(R_+;H), u \in W_2^4(R_+;H)$, а операторные коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

1) A - нормальный оператор с компактным обратным, спектр которого содержится в угловом секторе $S_\varepsilon = \{\lambda : |\arg \lambda| \le \varepsilon\}$, $0 \le \varepsilon < \pi/2$;
2) $B_j = A_j A^{-j}$ $\left(j = \overline{0,4}\right)$ - ограничены в H.

Определение 1. Если при $f \in L_2(R_+;H)$ существует вектор-функция $u(t) \in W_2^4(R_+;H)$, которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в $R_+ = (0, \infty)$ и граничным условиям (2) в смысле

$$\lim_{t\to 0} \|u(t)\|_{7/2} = 0, \quad \lim_{t \to 0} \|u''(t)\|_{3/2} = 0,$$

то $u(t)$ назовем регулярным решением задачи (1),(2).

Определение 2. Если при любой $f \in L_2(R_+;H)$ задача (1),(2) имеет регулярное решение $u(t)$, для которого имеет место оценка

$$\|u\|_{W_2^4} \le const \|f\|_{L_2},$$

то задачу (1),(2) назовем регулярно-разрешимой.

Сперва рассмотрим простую начально-краевую задачу

$$P_0\left(d/dt\right) u(t) \equiv \left(-\frac{d^2}{dt^2} + A^2 \right)^2 u = f(t),\ t \in R_+ = (0, \infty), \quad (3)$$

$$u(0) = u''(0) = 0. \quad (4)$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть оператор A удовлетворяет условию 1). Тогда задача (3),(4) регулярно разрешима.

Доказательство. После синус-преобразования получаем:

$$\left(\lambda^2 E + A^2\right)^2 \hat{u}(\lambda) = \hat{f}(\lambda).$$

Отсюда имеем:

$$\hat{u}(\lambda) = \left(\lambda^2 E + A^2\right)^{-2} \hat{f}(\lambda).$$

Тогда

$$u(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left(\lambda^2 E + A^2\right)^{-2} \sin \lambda t \, d\lambda$$

будет удовлетворять уравнению (1) почти всюду. Докажем, что $u(t) \in W_2^4(R;H)$.

По теореме Планшереля

$$\|u\|_{W_2^4}^2 = \|C^4 u\|_{L_2}^2 + \|u^{(4)}\|_{L_2}^2 = \|C^4 \hat{u}\|_{L_2}^2 + \|\lambda^4 \hat{u}\|_{L_2}^2 . \tag{5}$$

Очевидно, что

$$\|C^4 \hat{u}\|_{L_2} = \left\|C^4 \left(\lambda^2 E + A^2\right)^{-2} \hat{f}\right\|_{L_2} \le \sup_{\lambda \in R} \left\|C^4 \left(\lambda^2 E + A^2\right)^{-2}\right\| \cdot \|f\|_{L_2} . \tag{6}$$

Далее, при любом $\lambda \in R$, используя спектральное разложение оператора A, имеем:

$$\left\|C^4 \left(\lambda^2 E + A^2\right)^{-2}\right\|_{L_2} = \sup_{\substack{\sigma \in \sigma(A) \\ (\sigma = \mu e^{i\varphi})}} \left|\mu^4 \left(\lambda^2 + \mu^2 e^{2i\varphi}\right)^{-2}\right| = \sup_{\substack{\mu \ge \mu_0 \\ |\mu| \le \varepsilon}} \left|\mu^4 \left(\lambda^4 + \mu^4 + 2\lambda^2 \mu^2 \cos^2 2\varphi\right)^{-1}\right| \le$$

$$\le \sup_{\mu \ge \mu_0} \left|\mu^4 \left(\lambda^4 + \mu^4 + 2\lambda^2 \mu^2 \cos 2\varepsilon\right)^{-1}\right|.$$

Отсюда при $0 \le \varepsilon \le \pi/4$ $\left(\cos 2\varepsilon \ge 0\right)$ имеем:

$$\left\|C^2 \left(\lambda^2 E + A^2\right)^{-2}\right\| \le 1 , \tag{7}$$

а при $\pi/4 \le \varepsilon < \pi/2$ $\left(\cos 2\varepsilon \le 0\right)$, применяя неравенство Коши, получаем:

$$\left\|C^4 \left(\lambda^2 E + A^2\right)^{-2}\right\| \le \sup_{\mu \ge \mu_0} \left|\mu^4 \left(\lambda^4 + \mu^4 + \cos 2\varepsilon \left(\lambda^4 + \mu^4\right)\right)^{-1}\right| =$$

$$= \sup_{\mu \ge \mu} \mu^4 \left(\lambda^4 + \mu^4\right)^{-1} \left(1 + \cos 2\varepsilon\right)^{-1} = \frac{1}{2\cos^2 \varepsilon} . \tag{8}$$

Тогда из (6) следует, что $C^4 \hat{u} \in L_2(R_+;H)$.

Далее, аналогично получаем:

$$\left\|\lambda^4 \hat{u}(\lambda)\right\| = \left\|\lambda^4 \left(\lambda^2 E + A^2\right)^{-2}\right\| \le \sup_{\mu \ge \mu_0} \left|\lambda^4 \left(\lambda^4 + \mu^4 + 2\lambda^2 \mu^2 \cos 2\varepsilon\right)^{-2}\right| \|f\|_{L_2} \tag{9}$$

Отсюда, используя спектральное разложение оператора A, получаем, что

$$\left\|\lambda^4 \left(\lambda^2 E + A^2\right)^{-2}\right\| \le \begin{cases} 1 & , \ 0 \le \varepsilon \le \pi/4 , \\ \dfrac{1}{2\cos^2 \varepsilon} & , \ \pi/4 \le \varepsilon < \pi/2 . \end{cases} \tag{10}$$

Следовательно, $\lambda^4 \hat{u}(\lambda) \in L_2(R_+;H)$. Окончательно получаем, что $u \in W_2^4(R;H)$.

Очевидно, что уравнение $P_0 u = 0$ имеет только нулевое решение из $\overset{0}{W}_2(R_+ : H)$ и

$$\left\| P_0 u \right\|_{L_2(R_+:H)} \le const \ \left\| u \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^4(R_+:H)} .$$

Тогда из теоремы Банаха об обратном операторе $P_0^{-1} : \overset{0}{W}{}_2^4(R_+;H) \to L_2(R_+;H)$ существует и

$$\|u\|_{W_2^4(R_+;H)} \le const\|f\|_{L_2(R_+;H)} .$$

Теорема доказана.

Для решения задачи (1),(2) мы должны оценить нормы промежуточных производных. Имеет место следующая

Лемма 1. Пусть выполняется условие 1). Тогда при любом $u \in \overset{0}{W}{}_2^4(R_+;H)$ имеют место следующие оценки

$$\left\|A^{4-j}u^{(j)}\right\|_{L_2(R_+;H)} \le C_j(\varepsilon)\|P_0u\|_{L_2(R_+;H)} \qquad \left(j=\overline{0,4}\right), \tag{11}$$

где

$$C_0(\varepsilon)=C_4(\varepsilon)=\begin{cases} 1 & , \quad 0 \le \varepsilon \le \pi/4 , \\ \dfrac{1}{2\cos^2\varepsilon} & , \ \pi/4 \le \varepsilon < \pi/2 , \end{cases} \tag{12}$$

$$C_j(\varepsilon)=\begin{cases} d_{4,j}^2 & npu \ \varepsilon=0 , \\ d_{4,j} & npu \ 0<\varepsilon \le \pi/4 , \\ \dfrac{1}{2\cos^2\varepsilon} d_{4,j} & npu \ \pi/4 \le \varepsilon < \pi/2 , \end{cases} \tag{13}$$

где

$$d_{4,j} = \left(\frac{j}{4}\right)^{j/4} \left(\frac{4-j}{4}\right)^{4-j/4} .$$

Доказательство. Верность неравенств (11) при $j=0$ и $j=4$ получаются из соотношений (7)-(10). Докажем остальные неравенства.

При $j=1,2,3$ имеем:

$$\left\|A^{4-j}u^{(j)}\right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\|A^{4-j}\lambda^j\left(\lambda^2E+A^2\right)^{-1}\hat{f}(\lambda)\right\| \le \sup_{\lambda}\left\|A^{4-j}\lambda^j\left(\lambda^2E+A^2\right)^{-1}\right\|\|f\|_{L_2} . \tag{14}$$

Очевидно, что при $\lambda \in R$

$$\left\|A^{4-j}\lambda^j\left(\lambda^2E+A^2\right)^{-2}\right\| = \sup_{\sigma\in\sigma(A)}\left|\lambda^j\sigma^{4-j}\left(\lambda^2+\sigma^2\right)^{-2}\right| = \sup_{\substack{\mu\ge\mu_0>0\\|\varphi|\le\varepsilon}}\left|\mu^{4-j}\lambda^j\left(\lambda^2+\mu^2e^{2i\varphi}\right)^{-2}\right| =$$

$$= \sup_{\mu\ge\mu_0}\left|\mu^{4-j}\lambda^j\left(\lambda^4+\mu^4+2\lambda^2\mu^2\cos2\varphi\right)^{-1}\right| \le \sup_{\mu\ge\mu_0>0}\left|\mu^{4-j}\lambda^j\left(\lambda^4+\mu^4+2\lambda^2\mu^2\cos2\varepsilon\right)^{-1}\right| \equiv$$

$$\equiv \sup_{\mu\ge\mu_0>0}\varphi(\lambda;\mu).$$

При $\varepsilon = 0$ имеем:

$$\sup_{\mu\ge\mu_0>0} \varphi(\lambda;\mu) = \sup\left|\mu^{4-j}\lambda^j\left(\lambda^4+\mu^4+2\lambda^2\mu^2\right)^{-1}\right| = \sup_{\mu\ge\mu_0>0}\left|\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\left(\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+1\right)^{-2}\right| \le$$

$$\le \sup_{\eta>0}\left|\eta^j\left(\eta^2+1\right)^{-2}\right| = \left(\frac{j}{4}\right)^{j/2}\left(\frac{4-j}{4}\right)^{j/2} = d_{4,j}^2 .$$

При $0 < \varepsilon \le \pi/4 \quad (\cos 2\varepsilon \ge 0)$

$$\sup\varphi(\lambda,\mu) \le \sup\left|\mu^{4-j}\lambda^j\left(\lambda^4+\mu^4\right)^{-1}\right| = \sup_{\mu\ge\mu_0>0}\left|\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\left(\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4+1\right)\right| \le \sup_{\eta>0}\left|\eta^j\left(\eta^4+1\right)^{-1}\right| =$$

$$= \left(\frac{j}{4}\right)^{j/4}\left(\frac{4-j}{4}\right)^{4-j/4} = d_{4,j} .$$

При $\pi/4 \le \varepsilon < \pi/2 \quad (\cos 2\varepsilon \le 0)$

$$\sup_{\mu\ge\mu_0>0}\varphi(\lambda,\mu) = \sup_{\mu\ge\mu_0>0}\left|\mu^{4-j}\lambda^j\left(\lambda^4+\mu^4+\left(\lambda^4+\mu^4\right)\cos 2\varepsilon^{-1}\right)\right| \le$$

$$\le \sup_{\eta>0}\left|\eta^j\left(\eta^4+1\right)\right| \cdot \frac{1}{2\cos^2\varepsilon} == \left(\frac{j}{4}\right)^{j/4}\left(\frac{4-j}{4}\right)^{4-j/4} \cdot \frac{1}{2\cos^2\varepsilon} = \frac{1}{2\cos^2\varepsilon} d_{4,j} .$$

Лемма доказана.

Имеет место основная теорема

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1), 2) и имеет место неравенство

$$\alpha = \sum_{j=0}^{4} C_j(\varepsilon)\left\|B_{4-j}\right\| < 1 .$$

Тогда задача (1), (2) регулярно разрешима, здесь $C_j(\varepsilon)$ определены равенствами (12)-(13).

Доказательство. После замены $v = P_0 u$ имеем $u = P_0^{-1}v$ (P_0^{-1} существует по теореме 1). Тогда получаем следующее уравнение в $L_2(R_+ : H)$

$$v + P_1 P_0^{-1} v = f$$

или

$$\left(E + P_1 P_0^{-1}\right)v = f .$$

С другой стороны, применяя лемму 1, получаем:

$$\left\|P_1 P_0^{-1} v\right\|_{L_2} = \left\|P_1 u\right\|_{L_2} \le \sum_{j=0}^{4}\left\|A_{4-j} u^{(j)}\right\|_{L_2} \le \sum_{j=0}^{4}\left\|B_{4-j}\right\| \cdot \left\|A^{4-j} u^{(j)}\right\|_{L_2} \le$$

$$\le \left(\sum_{j=0}^{4}\left\|B_{4-j}\right\| C_j(\varepsilon)\right)\|v\|_{L_2} = \alpha\|v\|_{L_2} .$$

Так как $\alpha < 1$, то оператор $E + P_1 P_0^{-1}$ обратим в $L_2(R_+; H)$, поэтому

$$v = \left(E + P_1 P_0^{-1}\right)^{-1} f$$

и

$$u = P_0^{-1}\left(E + P_1 P_0^{-1}\right)^{-1} f .$$

Отсюда следует, что

$$\|u\|_{W_2^4} \le const \|f\|_{L_2} .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. ЛионсЖ.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371с.
2. Гумбаталиев Р.З. О разрешимости начально-краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка. // Изв. АН Азербайджана, сер. физ.-мат. наук, 1996, т. 17, №1-3, с. 68-76.
3. Мирзоев С.С. Кратная полнота части корневых векторов полиномиальных операторных пучков четвертого порядка с нормальной главной частью // В сборнике «Спектральная теория операторов». Баку: Элм, 1982, с.148-161.

DÖRDTƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİR SİNİF SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLL OLUNMASI HAQQINDA

L. İ.ƏMİROVA

XÜLASƏ

Məqalədə baş hissəsində normal operator olan dördtərtibli operator-diferensial tənlik üçün bir sinif sərhəd məsələsinin həll olunması haqqında teorem isbat edilmişdir. Bundan əlavə aralıq törəmə operatorlarının normaları qiymətləndirilmişdir. Həll olunan şərtləri verilmiş tənliyin əmsallarının xassələri ilə ifadə olunmuşdur. Belə ki, bu şərtlər tənliyin həyacanlanmış hissəsinə daxil olan operatorların nisbi normasının kiçiklik şərtləri ilə verilmişdir.

ON THE SOLVABILITY OF A CLASS OF BOUNDARY PROBLEMS FOR THE FOURTH ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS

L.I.AMIROVA

SUMMARY

In the paper the solvability theorem is proved for a class of boundary problems for the fourth order operator-differential equation with a normal operator in the main part. The estimations are obtained for the operator norms for the intermedial derivatives through the main part of the equation. The existence condition for the considered problem is expressed through the properties of the coefficients of the equation, that is, these conditions are given on the smallness condition of the relative norms of the operators within the perturbuted part of the equation.